

DYNAMICZNE MODELE EKONOMETRYCZNE

VIII Ogólnopolskie Seminarium Naukowe, 9-11 września 2003 w Toruniu
Katedra Ekonometrii i Statystyki, Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu

Antoni Smoluk

Akademia Ekonomiczna we Wrocławiu

Giełda, fale Elliotta, stożki i walce

Rozpocznę od anegdoty. Student zdaje egzamin u Newtona. - *Dlaczego Ziemia się kręci?* Po chwili intensywnego myślenia słychać niepewną odpowiedź: - *Nie pamiętam, wiedziałem, ale zapomniałem.* – *I cóż pan zrobił? Przez to zapomnienie zubożyłeś ludzkość. Był pan bowiem jedynym człowiekiem, który to wiedział.* Autor jest także w sytuacji tego studenta i stara się odpowiedzieć na pytanie, dlaczego ruch wirowy jest powszechny w przyrodzie. Jedynym uniwersalnym prawem nauki jest zasada równowagi interpretowana niekiedy jako prawo symetrii. Cała przyroda jest w równowadze dynamicznej. Ruch jest wynikiem zasady równowagi. Stała dążność do wyrównania potencjałów rodzi ruch. Zasada równowagi indywidualizuje poszczególne elementy i sprawia, że każde dwa liście tego samego drzewa - mimo wielkiego podobieństwa - są tak bardzo różne. Wszystkie znane prawa przyrody dadzą się zredukować zawsze do zasady równowagi. A pierwszym, który zasadzie tej nadał współczesną postać jest Newton, albowiem myśl, że *akcja jest reakcją* obowiązuje nie tylko w mechanice, ale i w całej nauce.

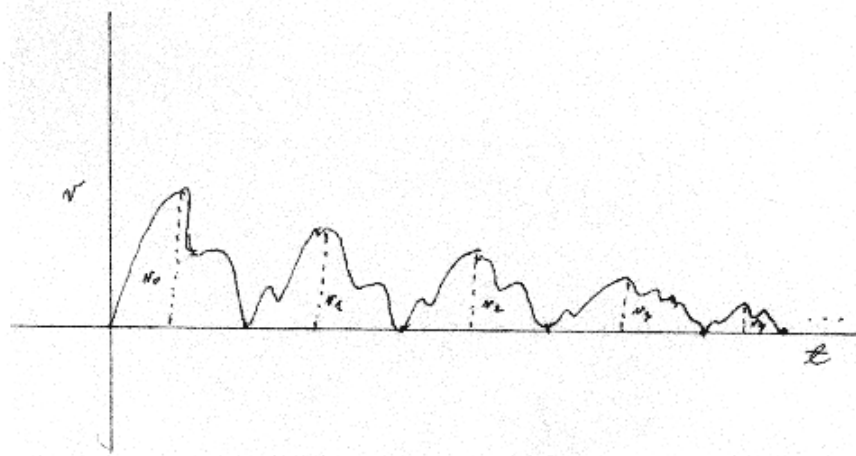
Okrąg w każdym punkcie ma naturę linii prostej, jest lokalnie tożsamy z odcinkiem. Widać to dobrze, gdy patrzymy na okrąg o wielkim promieniu. Ale koło nie jest linią prostą. Ma bogatszą osobowość. Zbiór liczb rzeczywistych z działaniem dodawania jest grupą, która jest izomorficzna ze zbiorem liczb dodatnich z działaniem mnożenia. Ten izomorfizm pozwala zastąpić trudne mnożenie łatwym dodawaniem. Izomorfizm jest tu funkcją wykładniczą lub funkcją odwrotną do niej - funkcją logarytmiczną. Są to naturalne funkcje wzrostu. Obejmują one, niewątpliwie prawdziwe, prawo Malthusa stwierdzające, że rozwój naturalny jest wykładniczy. Z wiadomych powodów rozwój wykładniczy musi być krótkotrwały.

Wzrost wykładniczy zamienia się na cykliczne powtórzenia. Takie są właśnie podstawy nauki o cykliczności. Teoria układów cybernetycznych ułatwia

badanie cykli, ponieważ obiekt jest wyodrębnioną całością, definicyjnie wyizolowaną cząstką. Podstawowym narzędziem opisu jest twór abstrakcyjny nazwany wektorem, który jest zwykłym skończonym ciągiem liczb. Wektory są stanami układu cybernetycznego, a relacje, które spełniają - prawami nauki. Oznacza to, że przyjmuje się powszechnie zasadę numerycznego opisu stanów układu cybernetycznego. Opis jest tym dokładniejszy, im wektor ma więcej składowych, im pomiar jest precyzyjniejszy. Każdy stan jest wektorem. Te wektory to modele statyczne. Zbiory stanów tworzą modele, gdy spełniają określone związki.

Ekonomia jest nauką o racjonalnym gospodarowaniu, o dobrym prowadzeniu domu, o zarządzaniu majątkiem. Podstawą tej nauki jest zasada racjonalności - *homo oeconomicus*. Jest to obiekt idealny, model teoretyczny. Wraz z upływem czasu stopa procentowa maleje do zera. Związane to jest ze wzrostem wydajności kapitału. Oszczędność jest naturalną skłonnością. W normalnych warunkach, bez wojen i kataklizmów, oszczędności rosną. Kapitał jest towarem. Popyt i podaż określają stopę procentową. W miarę wzrostu oszczędności wartość kapitału maleje. Stąd wyprowadza się tezę, że stopa procentowa asymptotycznie maleje do zera (rys. 1)

$$\lim(r_n) = 0.$$



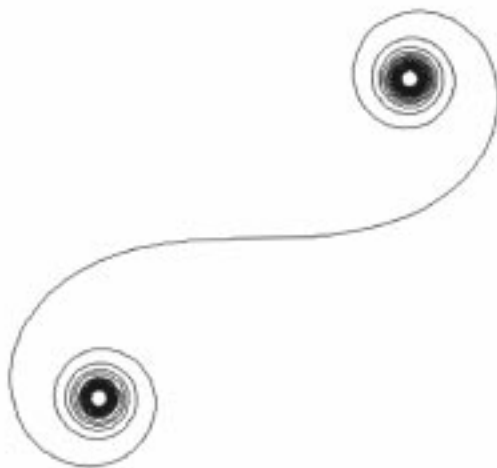
Rys. 1. Ewolucja stopy procentowej.

Stopę procentową definiuje się jako opłatę za odłożenie konsumpcji. Stopa procentowa niweluje inflację. Również stopa procentowa jest opłatą za ryzyko. Wszystkie te stwierdzenia nie są sprzeczne z naszą tezą. Średni przyrost kapitału jest zerowy; średni to znaczy po uwzględnieniu inflacji i ryzyka. Wolnych środków jest coraz więcej, bo więcej wytwarzamy niż konsumujemy. Lepiej dawać niż brać. Wzrost wydajności zwiększa naturalną skłonność do odkładania.

Ze względu na cykliczne pulsowanie całej przyrody wydaje się zasadne przyjęcie hipotezy o czasie kołowym. Hawking w swej teorii Wszechświata wprowadza czas urojony (D. Filkin (1998)). Czas kołowy jest czasem urojonym, albowiem koło

$$T = \{\exp(ix) : x \in R\}$$

jest grupą liczb zespolonych o module 1. Każda funkcja, której dziedziną jest koło T , nazywa się funkcją okresową. Dziedziną funkcji dwuokresowych jest torus $T \times T$, a dziedziną funkcji wielookresowych jest produkt kartezjański koła T . Stopa procentowa definiuje cykl koniunkturalny: od zerowej stopy procentowej w chwili t_n do zerowej stopy procentowej t_{n+1} .



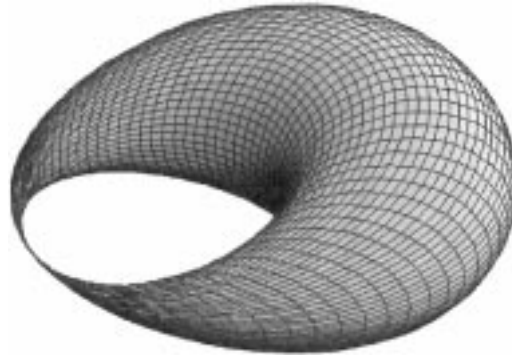
Rys. 2. Klotoida

Klotoida (rys. 2) jest krzywą, wijącą się wokół dwóch punktów, o równaniu parametrycznym

$$x(t) = \int_0^t \cos \tau^2 d\tau, \quad y(t) = \int_0^t \sin \tau^2 d\tau.$$

Jeden z tych punktów jest atraktorem, a drugi repulsorem. Jeżeli tę krzywą nałożymy na sferę przyjmując wyróżnione punkty za bieguny, a następnie bieguny utożsamimy, to otrzymamy model giełdy. Powierzchnia ściśniętego pączka (antykolia) przedstawiona na rys. 4 powstaje ze sfery przez utożsamienie biegunów ze środkiem sfery. Jest to geometryczny model czarnej dziury, czyli rodzaj przepompowni. Klotoida, która na sferze stała się spiralą przestrzenną, od północy przybliżyła się do punktu osobliwego, którym jest punkt połączenia bieguna północnego z południowym, a oddalała się od niego ze strony południowej. Punkt

osobliwy jest początkiem i końcem. Tu wszystko zaczyna swój żywot, by po osiągnięciu przeznaczenia zakończyć w nim bieg.



Rys. 3. Kolia

Układ cybernetyczny jest pewną strukturą matematyczną, którą można utożsamić z uporządkowaną piątką

$$(X, S, Y, f, g),$$

gdzie zbiory X, S, Y są relacjami jednoargumentowymi, natomiast f, g są funkcjami dwóch zmiennych, czyli relacjami trójargumentowymi. Bez straty na ogólności zawsze można przyjąć, że stany są wektorami, czyli elementy zbiorów X, S, Y są wektorami. Zbiór X oznacza rodzinę stanów wejściowych, S - stanów wewnętrznych i Y - stanów wyjściowych. Funkcja

$$f : X \times S \rightarrow Y$$

przyporządkowuje stanom wejścia i stanom wewnętrznym stany wyjścia. Natomiast funkcja g steruje pracą układu, czyli

$$g : X \times S \rightarrow S$$

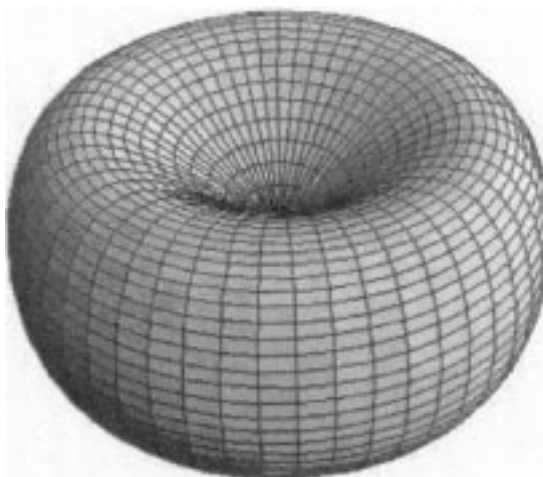
Zbiór dopuszczalnych stanów układu cybernetycznego nie może być dowolny. Ten zbiór zwykle jest pewną rozmaitością dostatecznie regularną opisującą pracę układu. W każdym punkcie rozmaitości istnieje przestrzeń styczna, z pominięciem być może, jednego punktu osobliwego. Prawo nauki rządzące układem jest w tej rozmaitości. Taką rozmaitością może być sfera, torus, walec, naszyjnik (kolia) (rys. 3) lub ściśnięty pączek (antykolio) (rys. 4). Kolia powstaje z torusa przez przewężenie - jedno koło redukuje się do punktu. Kolia powstaje także ze sfery, gdy utożsamimy bieguny z punktem leżącym na zewnątrz sfery -inaczej niż przy ściskaniu pączka: stąd nazwy kolia i antykolio.

Nad dowolnym zbiorem można rozpiąć przestrzeń liniową, tak że ten zbiór staje się baza przestrzeni. Twierdzenie to uzasadnia poprzednie uwagi o stanach

układu cybernetycznego. Koszyk dóbr jest wektorem, a bazą jest tutaj układ jednostek towarowych. Rozwinięcie wektora

$$x = a_0x_0 + a_1x_1 + \dots$$

jest pomiarem koszyka x w układzie jednostek (x_0, x_1, \dots) . Wektory, czyli punkty przestrzeni liniowej, są koszykami dóbr. Funkcjonały liniowe, czyli wektory dualne, to układy cen. Obliczanie wartości koszyka - będącego odpowiednikiem funkcji - przy zadanym układzie cen, który jest odpowiednikiem miary, jest całkowaniem wektora towarów. Kasjerka w sklepie cały dzień całkuje. Koszyki dóbr tworzą przestrzeń ekonomiczną; jest to przestrzeń wymiaru nieskończonego, albowiem dopuszcza się koszyki jednotowarowe, dwutowarowe, wielotowarowe i nie można podać górnego ograniczenia na liczbę zmiennych. Przestrzeń ekonomiczną utożsamiamy z algebrą liniową ciągów rzeczywistych o skończonej liczbie wyrazów różnych od zera.



Rys. 4. Antykolia

Prawa nauki są uniwersalne. Twierdzenia fizyki mają swoje odpowiedniki w ekonomii. Teza o śmierci cieplnej Wszechświata, temperatura wyrówna się i praca nie będzie możliwa, w ekonomii interpretujemy jako twierdzenie o malejącej do zera stopie procentowej. Podobnie jest z trzecim prawem Newtona, z którego wynika, że materia we Wszechświecie wiruje wokół środka ciężkości. W ekonomii oznacza to, że chwilowe stany równowagi wirują wokół nieznanego stanu idealnego. Pojawia się spirala logarytmiczna. Ta spirala jest tak często spotykana w przyrodzie, albowiem rosnący organizm zachowujący podobieństwo do stanów poprzednich generuje taką spiralę. Widać to pięknie w muszlach ślimaków (rys. 5).



Rys. 5. Sectio aurea

Prawo podobieństw Reynoldsa dotyczy przepływów cieczy lepkich. Stosunek siły bezwładności do siły lepkości jest stały i nazywa się liczbą Reynoldsa zależną oczywiście od danej prędkości. Istnieją takie graniczne prędkości, zależne od rodzaju cieczy, przy których ruch laminarny zamienia się w przepływ turbulentny. Przy dużych prędkościach przepływ staje się wirami cząstek cieczy wokół środka ciężkości. Oznacza to, że siły lepkości w tych ekstremalnych warunkach przestają działać. Liczy się tylko siła bezwładności. Prawa nauki są ogólne. Również prawo przepływów Reynoldsa ma interpretacje nie tylko hydrodynamiczne (J. Juzwiszyn (2003)). Można je interpretować w ekonomii i socjologii. Prędkość to kapitał, lepkość jest więzią społeczną. Przy dużym kapitale pękają powiązania zawodowe, koleżeńskie i rodzinne nawet. Pokusa łatwego wzbogacenia się zwykle zwycięża w starciu z ograniczeniami etycznymi i moralnymi. Przykłady tego są w Polsce i na świecie tak liczne, że nie ma potrzeby ich przytaczać. Z podobnych powodów wirują akcje na giełdzie. Chęć szybkiego zysku jest przemożna.

Każde prawo nauki bez teorii jest oderwanym stwierdzeniem. Niezależnie od sposobu wykrycia prawidłowości, empirycznie czy dedukcyjnie, prawidłowość naukowa, aby na to miano zasługiwać, powinna stanowić punkt węzłowy teorii formalnej. Jednym z kryteriów poznania naukowego jest piękno. W fizyce odkryli dystrybucje, a matematycy nadali temu pojęciu poprawny sens. Dystrybucja jest funkcjonalnym liniowym specjalnego rodzaju, dystrybucja jest całką. Wiedza matematyczna wzbogaca się i rozwija przez zasysanie odkryć nauk konkretnych. Matematyzacja jest konieczna ponieważ ułatwia rozumowanie, upraszcza zapisy, pozwala wykryć istotę. Z punktu widzenia abstrakcyjnego

ciągi arytmetyczne można utożsamić z ciągami geometrycznymi. Jest tak dlatego, bo grupa addytywna liczb rzeczywistych jest izomorficzna z grupą multiplikatywną liczb rzeczywistych dodatnich. Logarytm naturalny, także każdy inny logarytm, jest tym izomorfizmem. Bez matematyki nauka traci swoje piękno. Prawda jest w konkretnych interpretacjach i użyteczność tożsama z dobrem. *Savoir pour prévoir*. Poznajemy, aby przewidywać i lepiej żyć.

Metrologia ekonomiczna jest teorią pomiaru jakości charakteryzujących populację: poziomu życia, zdrowotności mieszkańców, wykształcenia. Czym jest ubóstwo i jak je mierzyć? Jak interpretować linię wiecznego śniegu w terminach ekonomii? Taki model ekonomiczny byłby odpowiedzią na pytanie, czym jest ubóstwo. Czym jest inflacja i jak mierzyć inflację? Czym jest liczba π wie każdy. Jest to stosunek obwodu koła do jego średnicy. Liczbę tę można wyznaczyć empirycznie mierząc metrem krawieckim obwód baniaka i jego średnicę. Jeśli pomiary były staranne, iloraz tych wielkości będzie w przybliżeniu równy $31/10$. Ta liczba jest normą i prawem nauki. Podobnie jest z inną stałą uniwersalną liczbą e . Jest to kapitał jaki otrzymamy po roku z banku, gdy na początku włożymy jedną złotówkę przy stopie procentowej jeden i przy założeniu, że w banku tym stosuje się procedurę ciągłej kapitalizacji. Ciągła kapitalizacja, to doliczanie odsetek w coraz krótszych okresach; jest więc

$$e = \lim(1 + 1/n)^n = 2,718\dots,$$

gdzie $1/n$ oznacza malejącą stopę procentową, natomiast n jest rosnącą liczbą okresów doliczania odsetek.

Czym są fale Elliotta? Czym są fale? Istnieją fale magnetyczne, fale elektryczne, świetlne, grawitacyjne; morze faluje, powietrze drga, cyklicznie zmieniają się pory roku. Fale Elliotta można utożsamić z falowaniem rynków finansowych. Aby stworzyć spójną teorię fal finansowych należy rozpocząć od addytywnej grupy liczb rzeczywistych. Z punktu widzenia geometrycznego jest to linia prosta, idealizacja naciągniętej nici, drogi promienia świetlnego oraz wszelkiego rodzaju obiektów w kształcie pręta. Addytywna grupa liczb rzeczywistych jest strukturą z trzema działaniami: zeroargumentowym, jednoargumentowym i dwuargumentowym. Działania te związane są z naturą linii prostej: wyróżniamy element neutralny - zero, symetryczne odbicie w zerze - negację liczby i sumę. Koło powstaje z prostej i jest niewątpliwie najpiękniejszą krzywą mającą liczne modele w przyrodzie.

Analizując funkcje poligonalne będące wykresami kursów akcji giełdowych, Elliott dopatrywał się w nich podobieństwa z falującym morzem i ciągiem Fibonacciego. Te spostrzeżenia przerodziły się w wiedzę empiryczną o podłożu intuicyjnym zwaną teorią fal Elliotta. W teorii tej centralną rolę odgrywa liczba złota

$$\chi = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

spotykana w przyrodzie, bo ciąg Fibonacciego jest prawem nauki.

Po okresie wzrostu zawsze następuje załamanie, bo cały wszechświat z nieznanymi nam powodów pulsuje. Funkcja, której wykresem jest linia łamana nazywa się funkcją poligonalną. Funkcja poligonalna jest linią łamaną o skończonej liczbie punktów, w których pochodna nie istnieje. Szeregi czasowe reprezentuje się takimi właśnie funkcjami.

Gdy na płaszczyźnie pojawia się punkt, uważamy to za cud. Jest to początek narodzin, wydarzenie niezwykle, katastrofa. Punkt jest miejscem styku płaszczyzny z powierzchnią leżącą nad płaszczyzną. Obniżając powierzchnię otrzymujemy na płaszczyźnie warstwice. Z punktu może się więc rozwinąć wszystko. Punktem jest kometa na niebie, od wieków uważana za zwiastuna wydarzeń niezwykłych. Punktem rozpoczął się napis na ścianie podczas uczyty Baltazara. Jeżeli podniesiemy wymiar przestrzeni i wejdziemy w świat zewnętrzny, wtedy tajemnicze obiekty wyglądają inaczej. Widzimy bowiem przeważnie tylko rzuty, cienie przedmiotów rzeczywistych. Teoria rozwinięć, będąca podstawą stworzonej przez Thoma teorii katastrof, zdejmuje z oczu przesłony narzucające jeden specyficzny punkt widzenia. Jak wygląda przedmiot w przestrzeni czterowymiarowej, którego rzut na płaszczyznę widzimy? Fale Elliotta są rzutami na płaszczyznę krzywej przestrzennej.

Szukać prawidłowości rządzących rynkami finansowymi potrzeba w przestrzeni trójwymiarowej. Funkcję poligonalną - szereg czasowy kursów akcji - należy podnieść o jeden wymiar, do przestrzeni trójwymiarowej. Otrzymamy wtedy linię nawiniętą na stożek. Trzy giełdowe wymiary, to czas, cena i liczba akcji. Rzutnią, czyli płaszczyzną, na którą krzywą przestrzenną rzutujemy, jest płaszczyzna przechodząca przez oś stożka i równoległa do osi ceny akcji. Najwygodniej założyć, że oś stożka jest linią czasu, a rzutnią płaszczyzna wyznaczona przez cenę i czas. Na stożku jest spirala.

Rzutem spirali są właśnie fale Elliotta. Podniesienie wymiaru o jeden i przejście do przestrzeni trójwymiarowej czyni z intuicyjnej wiedzy o falach Elliotta teorię naukową.

Aktualny stan giełdy wiruje wokół punktu równowagi, który leży na osi stożka. Oczywiście kąt rozwarcia stożka nie jest stały. Można jednak przyjąć, że w pewnym okresie jest to jeden stożek. Wielkość kąta rozwarcia tego stożka mówi o stabilności ekonomii. Im mniejszy kąt, tym gospodarka jest stabilniejsza. Również wierzchołek stożka mówi coś o ekonomii. Jeśli jest w przodzie, to gospodarka się stabilizuje, zbliżamy się do punktu równowagi. Wahania są coraz mniejsze. Jeżeli jest poza nami, to układ rozregulowuje się, wahania są coraz większe.

Niestabilny układ jest wygodny dla graczy giełdowych, bo tylko w takiej sytuacji można robić wielkie interesy. Jak więc widać przestrzenne rozwinięcie fal Elliotta może być produktywnie. Katastroficzne spojrzenie na giełdę przyczynia się do lepszego jej zrozumienia i objaśnia źródło chaosu, który tam się widzi. Chaos giełdowy generuje spirala. Tak więc by zobaczyć co wyrośnie z jednego punktu, potrzeba go rozwinąć, przejść do wyższego wymiaru.

Koło jest grupą ilorazową prostej rzeczywistej względem grupy dyskretnej liczb całkowitych. Ta własność jest istotą koła. Nieco wulgaryzując można powiedzieć, że prosta i koło tworzą wszystko. Odpowiedź na pytanie, czy rozwój musi być cykliczny, wydaje się jednoznaczna. Koło jest także symbolem nieskończoności. Słońce codziennie wschodzi, pory roku powtarzają się. W biologii cykliczność przejawia się w bezustannych narodzinach i śmierci. Nie ma wątpliwości, że cykliczne następstwo jest najprostszym modelem nieskończonego trwania. Jest to nieskończoność w skończonym i ograniczonym kole.

Zbiór stanów giełdy jest różnorodnością dwuwymiarową powstającą z torusa, czyli z krakowskiego obwarzanka, przez przewężenie w jednym punkcie. Na składowe nakłada się warunki ograniczające, bilansujące. Przejście do dynamiki, czyli wprowadzenie trajektorii w zbiorze stanów, jest czynnością zupełnie naturalną. Trajektorie są funkcjami ciągłymi.

Najprostszą i najważniejszą definicją stanu równowagi w ekonomii jest utożsamienie równowagi z pełnym zatrudnieniem. W ekonomii i w życiu zawsze jest równowaga. W pierwszej chwili te dwa stwierdzenia wydają się sprzeczne. Przecież w większości krajów jest znaczne bezrobocie? Układ cybernetyczny bez równowagi nie może istnieć. Równowaga jest atrybutem istnienia. Naturalnie istnieją różne poziomy równowagi. Może nawet lepiej mówić o równowadze warunkowej. Równowaga ta charakteryzuje się niższym poziomem produkowanych dóbr i usług niż w warunkach pełnego zatrudnienia. Przyjmujemy prawo Saya mówiące, że produkcja kreuje zbytek, czyli że nie ma kryzysów nadprodukcji. Jak to należy rozumieć? Zakłada się, że podmioty gospodarcze zachowują się racjonalnie i że mają pełną informację zarówno co do swych przyszłych zamierzeń, jak i co do przyszłych zamierzeń i potrzeb wszystkich swych partnerów gospodarczych. Jest to niewątpliwie założenie idealne. W rzeczywistości ukrywa się te informacje przed konkurencją. Dlatego tak ważna jest rola państwa w ekonomii. Planista centralny jest arbitrem niezależnym, bezstronnym i nieprzekupnym, on właśnie zbiera wszelkie informacje, sumuje je i podaje, co z zamierzeń poszczególnych wytwórców wynika.

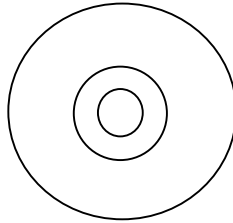
Wszystko się kręci, wszystko poddane jest wirowi, bo wszystko zmierza do równowagi

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt).$$

Harmonia

$$a_n \cos nt + b_n \sin nt$$

jest w cyklicznych nawrotach. Ruch obrotowy panuje w kosmosie, świat pulsuje a więc żyje (rys. 6). Na niebie oglądamy spiralne mgławice, galaktyki mają właśnie taki kształt, kwiat słonecznika jest również ułożony spiralnie i wykonuje cykliczny ruch za słońcem. W niżu powietrze wiruje po spiralach i w wyżu



Rys. 6. Orbity

także - tylko w przeciwną stronę. Silniej odkręcony kran jest przykładem maszyny generującej chaos, wypływający strumień wody kręci się i rozrywa. Ziemia obraca się wokół swej osi, a wokół Ziemi Księżyc, natomiast cały ten zespół obiega Słońce.

Przykłady ze świata fizyki i biologii można mnożyć. W ekonomii cena oscyluje wokół punktu równowagi, a wyrazem tej oscylacji są słynne fale Elliotta - rzut spirali nawiniętej na stożek. Ciąg Fibonacciego, złota liczba oraz spirala na stożku - łącznie modelują funkcjonowanie takiej niezwyklej instytucji, jaką jest giełda, albowiem fortuna kołem się toczy.

Literatura

- Filkin, D. (1998), *Wszechświat Stephena Hawkinga*, Gazeta Wyborcza z 18 kwietnia 1998 roku, s. 14-15.
- Juzwiszyn, J. (2003), *Ekonofizyczna próba sformalizowania fal Elliotta*, Praca doktorska, Akademia Ekonomiczna imienia Oskara Langego we Wrocławiu. Wydział Zarządzania i Informatyki.
- Smoluk, A. (2002). Normy, prawa nauki i fale Elliotta. *Ekonomia Matematyczna*, 6, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu, s. 11-20.