DYNAMICZNE MODELE EKONOMETRYCZNE
VIII Ogólnopolskie Seminarium Naukowe, 9-11 września 2003 w Toruniu
Katedra Ekonometrii i Statystyki, Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu

CzesławDomański
Uniwersytet Łódzki

Zastosowanie testów serii znaków w statystycznej kontroli procesu

1. Uwagi wstępne

Podstawowym zadaniem statystycznego sterowania procesem jest wyodrębnienie wyników pomiarów, które wskazują na istnienie „zakłóceń" w stabilnym przebiegu.

Przyjmijmy, że zmienne losowe zakłócające stabilny przebieg procesu mają charakter addytywny, czyli dodają się do zmiennej odpowiadającej stabilnemu, czyli uregulowanemu procesowi.

Próba pobrana w chwili t odpowiada obserwacjom pewnej zmiennej losowej $Y(t)$

$$Y_t = X_0 + \sum_{i=1}^{k} I_i(t) X_i \tag{1}$$

gdzie

$$x_i \approx F_i(\mu_i, \sigma_i^2)$$

oraz funkcja wskaźnikowa $I_i(t)$ ma postać

$$I_i(t) = \begin{cases} 1 & z\ p-wem\ p_i \\ 0 & z\ p-wem\ (1-p_i) \end{cases} \tag{2}$$

Jeżeli rozważany model (1) jest właściwy i mamy k możliwych wyznaczonych przyczyn rozregulowania, to w danej próbie obecna jest jedna z 2^k możliwych kombinacji zmiennych losowych odpowiadających tym przyczynom rozregulowania. Zauważmy, że skrajnymi możliwościami spośród wszystkich 2^k kombinacji są:

– niewystąpienie żadnej przyczyny rozregulowania $(I_i(t) = 0$ *dla* $i = 1,...,k)$ *dla wszystkich* $i = 1,...,k$,
– wystąpienie wszystkich przyczyn rozregulowania $(I_i(t) = 1$ *dla wszystkich* $i = 1,...,k$)

Przyjmujemy, że próby pobierane są dostatecznie rzadko, by postać zmiennej Y dla jednej próby była niezależna od jej postaci dla innej próby. Ponadto zakładamy, że każda funkcja wskaźnikowa I_i zachowuje stałą wartość *(0 lub 1)* w czasie pobierania jednej próby oznacza to, że czas pobierania próby jest dostatecznie krótki by na próbę składały się obserwacje jednej i tej samej zmiennej losowej Y .

2. Rozkłady liczby i długości serii monotonicznych

Niech $y_1, y_2,..., y_n$ oznaczają ciąg uporządkowanych w czasie obserwacji dokonanych na zmiennej na zmiennej Y_t

Rozważając ciąg znaków

$$\text{sgn}(y_2 - y_1), \text{sgn}(y_3 - y_2),..., \text{sgn}(y_n - y_{n-1}) \tag{3}$$

gdzie:

$$\text{sgn } y = \begin{cases} +, & gdy \quad y > 0, \\ -, & gdy \quad y < 0, \end{cases} \tag{4}$$

można otrzymać tzw. serie monotoniczne[1].

Asymptotyczne rozkłady serii monotonicznych znaleźli H. Levene (1953) i J. Wolfowitz (1944). J Wolfowitz pokazał, że graniczny rozkład długoci serii znaków, przy założeniu, że trend nie istnieje, jest wykładniczym rozkładem Poissona. Dowód jego twierdzenia stosuje się do rozkładu serii o długości wynoszącej dokładnie *r*. Jednakże założenia poczynione przy jego wyprowadzeniu mogą być zastosowane do rozkładu serii o długości *r* lub większej. P.S. Olmsted (1958)podał, że zgodność rozkładu długości serii znaków z rozkładem Poissona jest rzędu 0,0001 dla $r \geq 6$, 0,001 dla $r \geq 5$, 0,01 dla $r \geq 4$, i 0,1 dla $r \geq 3$, gdy $n \geq 14$. Wynika stąd, że dla $r \geq 5$ prawdopodobieństwo[2] otrzy-

[1] Funkcja sgn *y* nie jest określona dla *y=0,* ale prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia y=*0* przy założeniu, że zmienna losowa jest ciągła, równa się zeru

[2] Krytyczne wartości dla testu serii, opartego na długości serii, można wyznaczyć na podstawie rozkładu Poissona. Dla $r \geq 5$ zachodzi relacja $D^2(L_r^{'}) = E(L_r^{'})$.

mania przy *n* obserwacjach co najmniej jednej serii o długości przynajmniej *r* elementów jest równe:

$$P\{L_r^{'} \geq 1\} = 1 - e^{-E(L_r^{'})}, \tag{5}$$

gdzie:

$$E(L_r^{'}) = \frac{2[(n-1)(r+1)+1]}{(r+2)!} \quad \left(dla \quad \frac{n}{2} \leq r \leq n-1\right) \tag{6}$$

E. S. Edigington (1961) podał formułę rekurencyjną, która umożliwiła mu opracowanie tablic rozkładu serii znaków „+" lub „-". Opierając się na tej tablicy zostały wyznaczone wartości krytyczne dla testu opartego na liczbie serii monotonicznych, które zawarte są w tablicy 1. W tablicy tej podane są dla dziesięciu prawdopodobieństw α (0,005, 0,01, 0,025, 0,05, 0,10, 0,90, 0,95, 0,975, 0,99, 0,995) takie największe liczby całkowite l_α, dla których $P\{L \leq l_\alpha\} \leq \alpha$, jeśli $\alpha < 0{,}5$ oraz takie najmniejsze liczby całkowite l_α, dla których $P\{L \leq l_\alpha\}$, jeśli $\alpha > 0{,}5$. Zamieszczone kwantyle zmiennej *L* ułatwiają w znacznym stopniu korzystanie z testów serii opartych na liczbie serii monotonicznych.

E. S. Edigington podaje, że zmienna losowa *L*, dla $n > 25$, ma rozkład asymptotycznie normalny o parametrach danych wzorami:

$$E(L) = \frac{2n-1}{3}, \tag{7}$$

$$D^2(L) = \frac{16n-29}{90}. \tag{8}$$

Wartość oczekiwana zmiennej L_r, oznaczająca liczbę serii długości *r*, przyjmuje postać:

$$E(L_r) = \frac{2}{(r+3)!}\left[n(r^2+3r+1) - (r^3+3r^2-r-4)\right], \tag{9}$$

dla $r \leq n-2$,

a wariancję zmiennej $L_r^{'}$ wyraża się wzorem:

$$D^2(L_r^{'}) = \left[E(L_r^{'})\right]\left[1 - \frac{3}{r!} - \frac{r!}{(2r)!} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(r!)^2} + \frac{1}{(2r)!}\right)\right] \tag{10}$$

Do celów praktycznych mogą być stosowane wzory na wariancje zmiennych L_r i $L_r^{'}$ dla $r \leq 3$:

$$D^2(L_1) = \frac{305n-347}{720}, \tag{11}$$

$$D^2(L_2) = \frac{51\,106n - 73\,859}{453\,600}, \tag{12}$$

$$D^2(L_1^{'}) = \frac{16n - 29}{90}, \tag{13}$$

$$D^2(L_2^{'}) = \frac{57n - 43}{720}, \tag{14}$$

$$D^2(L_3^{'}) = \frac{21\,496n - 51\,269}{453\,600}. \tag{15}$$

Duże znaczenie w badaniach ekonometrycznych, a także statystycznej kontroli jakości mają serie znaków odchyleń w górę i w dół, czyli tzw. serie monotoniczne. Mają one tę zaletę, że od razu wiadomo, że suma długości wszystkich serii wynosi *(n-1)* gdzie *n* jest liczbą obserwacji.

3. Testy oparte na ogólnej liczbie serii znaków

Niech $y_1, y_2, ..., y_n$ oznacza ciąg uporządkowanych w czasie realizacji zmiennych losowych Y_t. Na podstawie tego ciągu należy zweryfikować hipotezę H_0, że wartości oczekiwane tych zmiennych są jednakowe, a więc że badany ciąg nie zawiera trendu. Test oparty na ogólnej liczbie serii znaków jest następujący. Opierając się na wynikach próby, tworzymy ciąg znaków $\operatorname{sgn}(y_{i+1} - y_i)$. Następnie wyznaczamy wartość sprawdzianu tego testu – statystykę *l*, która jest ogólną liczbą serii znaków „+” i „-”. Jeżeli ciąg $\{x_i\}$ jest losowy, to należy się spodziewać stosunkowo dużej liczby krótkich serii znaków „+” i serii znaków „-”. Natomiast, gdy w ciągu występuje trend, wówczas można się spodziewać wielu długich serii, przy czym serie te złożone będą na ogół ze znaków „+”,jeśli trend jest rosnący i ze znaków „-”, jeśli trend jest malejący. W zawiązku z tym obszar krytyczny dla tego testu buduje się lewostronnie, tzn. gdy zachodzi relacja $l \le l_\alpha$, hipotezę zerową należy odrzucić. Wartości krytyczne można odczytać z tablicy 1. Dla *n*>25 zmienna *L* ma rozkład asymptotycznie normalny o parametrach danych wzorami (7) i (8).

4. Test Moora-Wallisa

Test Moora-Wallisa jest oparty na liczbie znaków „+”, którą oznaczamy symbolem z^+. Hipotezę H_0 odrzuca się na rzecz hipotezy alternatywnej, że występuje trend malejący, jeśli $z^+ < z_\alpha^{+'}$, gdzie:

$$z_\alpha^{+'} = \frac{n}{2} - \left| Z_\alpha^+ - \frac{n-1}{2} \right|, \tag{16}$$

$Z_\alpha^{+'}$ można odczytać z tablicy 2 dla odpowiednich n i α.

Analogicznie, odrzuca się hipotezę H_0 na rzecz hipotezy alternatywnej, że występują trend rosnący , gdy $z^+ > z_\alpha^+$, gdzie:

$$z_\alpha^+ = \frac{n-2}{2} + \left| Z_\alpha^+ - \frac{n-1}{2} \right|. \tag{17}$$

Przyjmuje się hipotezą, że występuje trend rosnący lub malejący, jeśli zachodzą nierówności:

$$z^+ > z_{\alpha/2}^{+'}. \tag{18}$$

Jeśli $n \geq 13$ oraz

$$\frac{1}{3n} \leq \alpha \leq 1 - \frac{1}{3n} \tag{19}$$

to z_α^+ i $z_\alpha^{+'}$ wyznacza się na podstawie następujących wzorów:

$$z_\alpha^{+'} = \frac{1}{2} + \frac{n-1}{2} - u_\alpha \sqrt{\frac{n+1}{12}} \tag{20}$$

oraz

$$z_\alpha^+ = -\frac{1}{2} + \frac{n-1}{2} + u_\alpha \sqrt{\frac{n+1}{12}}, \tag{21}$$

gdzie u_α jest kwantylem rzędu α rozkładu normalnego $N(0,1)$, przy czym α należy przyjąć takie, aby wielkości te były całkowite.

5. Test chi-kwadrat oparty na oczekiwanych i zaobserwowanych seriach monotonicznych różnej długości

Na podstawie wzorów (6) i (9) buduje się rozkład teoretyczny liczby serii różnych długości, a zgodność zaobserwowanego rozkładu z tym rozkładem teoretycznym weryfikuje się za pomocą testu chi-kwadrat.

F. Moore i W. Wallis (1943) zaproponowali następujący sprawdzian dla tego testu.

$$\chi^2 = \frac{(l_1 - e_1)^2}{e_1} + \frac{(l_2 - e_2)^2}{e_2} + \frac{(l_3^{'} - e_3^{'})}{e_3}, \tag{22}$$

gdzie:

l_1 – liczba serii długości 1,

l_2 – liczba serii długości 2,

$l_3^{'}$ – liczba serii długości większej niż 2,

a $e_1, e_2, e_3^{'}$ są określone wzorami:

$$e_1 = E(L_1) = \frac{5n+1}{12}, \tag{23}$$

$$e_2 = E(L_2) = \frac{11n-14}{60}, \tag{24}$$

$$e_3^{'} = E(L_3^{'}) = \frac{4n-11}{60}. \tag{25}$$

Odrzuca się hipotezę H_0 na rzecz hipotezy alternatywnej, że występuje trend lub cykle, jeśli $\chi^2 > \chi_\alpha^{'2}$. W przypadku gdy

$$\chi^2 = \begin{cases} \frac{7}{6}\chi_\alpha^2 \ gdy \ \chi^2 \leq 6{,}3 \\ \chi_\alpha^2 \ gdy \ \chi^2 > 6{,}3 \end{cases}$$

przy czym w pierwszym przypadku χ_α^2 odczytujemy dla 2 stopni swobody, a w drugim dla 2,5 stopni swobody (por. Domański (1990)).

6. Test chi-kwadrat oparty na liczbie serii znaków

Inny test chi-kwadrat jest oparty na oczekiwanych i zaobserwowanych seriach różnej długości. Sprawdzianem tego testu jest statystyka:

$$\chi^2 = \frac{\left[z^+ - E(Z^+)\right]^2}{D^2(Z^+)} + \frac{\left[l - E(L)\right]^2}{D^2(L)} \tag{26}$$

gdzie:

z^+ – liczba znaków „+”

l – ogólna liczba serii znaków,

a wartości oczekiwane i wariancje są określone wzorami:

$$E(Z^+) = \frac{n-1}{2}, \tag{27}$$

$$E(L) = \frac{2n-1}{3}, \tag{28}$$

$$D^2(Z^+) = \frac{n+1}{2}, \tag{29}$$

$$D^2(L) = 0{,}178n - 0{,}323. \tag{30}$$

Hipotezę H_0 odrzucamy na korzyść hipotezy alternatywnej, że występuje trend lub cykle, jeśli dla 2 stopni swobody $\chi^2 > \chi^2_\alpha$.

Uwagi końcowe

Problem testowania losowości bardzo często występuje przy kontroli jakości wytworzonych produktów. Przedstawione testy losowości specjalne pasują do kontroli jakości. Mają one jak się wydaje następujące wspólne cechy:

1. Są one oparte na seriach należących do sekwencji $y_1, y_2, ..., y_n$.
2. Procedura testowa jest inwariantna względem topologicznych transformacji osi odciętych, tj. test daje dobre same rezultaty jeżeli zmienne $y_1, y_2, ..., y_n$, zastępujemy przez $y_1', y_2', ..., y_n'$, gdzie $y' = f(y)$ a $f(t)$ jest dowolną, ciągłą, ściśle monotoniczną funkcją t.
3. Wielkości obszaru krytycznego, tj. prawdopodobieństw odrzucenia hipotezy losowości, gdy jest ona prawdziwa nie zależy od wspólnej dystrybuanty $F(y)$ zmiennych $y_1, y_2, ..., y_n$.

Warunek 3 jest spełniony, jeżeli zachodzi warunek 2 i jeżeli $F(y)$ jest ciągła.

Teoria serii jako narzędzia pomocniczego kontroli jakości rozwija się w następującym kierunku:

Przy podejmowaniu decyzji dotyczącej procesu produkcyjnego należy wybierać takie typy serii i statystyki, które oparte są na odpowiednich typowych odchyleń od stanów związanych z kontrolą statystyczną, które uznane są przez inżynierów za najbardziej możliwe w realizacji. Różne procesy produkcyjne wymagają różnych modyfikacji metod statystycznych.

Powinno się rozwijać teorie i procedury oparte na metodach Monte Carlo, którą umożliwiają precyzyjnie określanie funkcji mocy testów i związków między różnymi statystykami testowymi.

Wykorzystując metody statystyczne do oceny jakości procesu produkcyjnego należy uwzględnić minimalizację strat finansowych.

Tablica 1. Wartości krytyczne dla testu serii znaków „+” i „-”*

l_α / n	$l_{0,005}$	$l_{0,01}$	$l_{0,25}$	$l_{0,05}$	$l_{0,10}$	$l_{0,90}$	$l_{0,95}$	$l_{0,75}$	$l_{0,99}$	$l_{0,999}$
2						1	1	1	1	1
3						2	2	2	2	2
4					1	3	3	3	3	3
5			1	1	1	4	4	4	4	4
6	1	1	1	1	2	5	5	5	5	5
7	1	1	2	2	2	6	6	6	6	6
8	1	2	2	2	3	6	7	7	7	7
9	2	2	2	3	3	7	7	8	8	8
10	2	3	3	3	4	8	8	9	9	9
11	3	3	4	4	4	9	9	9	10	10
12	3	4	4	4	5	9	10	10	11	11
13	4	4	5	5	6	10	11	11	11	12
14	4	5	6	6	6	11	11	12	12	12
15	5	5	6	6	7	12	12	13	13	13
16	5	6	6	7	7	12	13	13	14	14
17	6	6	7	7	8	13	14	14	15	15
18	6	7	7	8	8	14	14	15	15	15
19	7	7	8	8	9	15	15	16	16	17
20	7	8	8	9	10	15	16	16	17	17
21	8	8	9	10	10	16	17	17	18	18
22	9	9	10	10	11	17	17	18	19	19
23	9	10	10	11	12	17	18	19	19	19
24	10	10	11	11	12	18	19	19	20	21
25	10	11	11	12	13	19	20	20	21	21

* Tablica zawiera dla kilku prawdopodobieństw α takie największe liczby całkowite l_α dla których $P(L \le l_\alpha) \le \alpha$, jeśli $\alpha < 0{,}5$, oraz takie najmniejsze liczby całkowite l_α, dla których $P(L \le l_\alpha) \ge \alpha$, jeśli $\alpha > 0{,}5$

Źródło: Opracowanie własne na podstawie pracy Edigingtona (1961)

Tablica 2. Wartości α dla testu serii opartego na liczbie znaków „+”

Z_α / n	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	0,167	0,042	0,008							
1			0,225	0,081	0,024	0,006				
2					0,260	0,113	0,042	0,013	0,004	
3							0,285	0,139	0,049	0,022
4									0,303	0,161

Źródło: Obliczenia własne na podstawie Walsha (1962)

Literatura

Domański, Cz. (1990), *Testy statystyczne*, PWE, Warszawa.

Edigington, E. S. (1961), Probability table for number of runs of signs of first differences in ordered series, *Journal of the American Statistical Association*, t. 56, s. 156-159.

Levene, H. (1953), On the power function of tests of randomness based on runs up and down, *Annals of Mathematical Statistics*, t. 23, s. 34-56.

Moore, G. H., Wallis, W. A. (1943), Times series significance tests based on signs of defferences, *Journal of the American Statistical Association*, t. 38, s. 153-164.

Olmsted, P. S. (1958), Runs determined in a sample by an arbitrary cut, *Bell System Technical Journal*, t. 37, s. 55-82.

Walsh, J. E. (1962) *Handbook of nonparametric statistics*, D. Can Nostrand Co. Inc., Princeton.

Wolfowitz, J. (1944), Asymptotic distribution of runs up and down, *Annals of Mathematical Statistics*, t. 15, s. 163-172.